Teoria analitica delle deformazioni areali nelle proiezioni cartografiche: isocole tissotiane, teoremi di Airy-Kavrajskij e ottimizzazione delle rappresentazioni equivalenti

Fondamenti della teoria delle deformazioni e l'ellisse indicatrice di Tissot

Introduzione: la geometria della distorsione cartografica

La rappresentazione della superficie terrestre su un piano comporta inevitabilmente l'introduzione di distorsioni geometriche che alterano le proprietà metriche originali. Mentre le proiezioni conformi preservano gli angoli e le proiezioni equivalenti conservano le aree, la stragrande maggioranza delle rappresentazioni cartografiche introduce alterazioni complesse che variano da punto a punto e da direzione a direzione. La teoria matematica che permette di quantificare, analizzare e ottimizzare queste distorsioni costituisce uno dei capitoli più raffinati della geodesia teorica, sviluppatosi principalmente nel diciannovesimo secolo attraverso i contributi fondamentali di Nicolas Auguste Tissot, George Biddell Airy e successivamente Vladimir Kavrajskij.

Il problema centrale della teoria delle deformazioni può essere formulato nel modo seguente: data una proiezione cartografica che trasforma punti dalla superficie terrestre, rappresentata attraverso coordinate geografiche (φ, λ) dove φ indica la latitudine e λ la longitudine, verso un piano cartesiano con coordinate (x, y), come possiamo caratterizzare quantitativamente le alterazioni che questa trasformazione introduce nelle distanze, nelle aree e negli angoli? E soprattutto, esiste un formalismo matematico che ci permetta di visualizzare geometricamente queste distorsioni e di confrontare diverse proiezioni sulla base di criteri oggettivi?

La risposta a queste domande fu fornita magistralmente da Nicolas Auguste Tissot nella sua memoria del 1881 intitolata "Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques". Tissot introdusse un concetto geometrico di straordinaria eleganza: l'ellisse indicatrice, che permette di visualizzare in ogni punto della mappa come un cerchio infinitesimo sulla superficie terrestre venga deformato dalla proiezione. Questa costruzione geometrica fornisce un quadro completo delle distorsioni locali e costituisce tuttora il fondamento della teoria quantitativa delle deformazioni cartografiche.

Derivazione matematica dell'ellisse indicatrice di Tissot

Per sviluppare rigorosamente la teoria dell'ellisse indicatrice, dobbiamo iniziare dalla formulazione differenziale delle proiezioni cartografiche. Supponiamo di avere una proiezione definita dalle equazioni $x = x(\varphi, \lambda)$ e $y = y(\varphi, \lambda)$, dove (φ, λ) sono le coordinate geografiche e (x, y) le coordinate cartesiane sul piano della mappa. Queste funzioni sono supposte sufficientemente regolari, ovvero almeno due volte continuamente differenziabili nel dominio di interesse.

Il differenziale totale delle coordinate cartesiane può essere espresso in termini dei differenziali delle coordinate geografiche attraverso le derivate parziali:

$dx = (\partial x/\partial \varphi)\, d\varphi + (\partial x/\partial \lambda)\, d\lambda \quad dy = (\partial y/\partial \varphi)\, d\varphi + (\partial y/\partial \lambda)\, d\lambda$

Introduciamo ora una notazione compatta che si rivelerà estremamente utile. Definiamo le derivate parziali:

$x_\varphi = \partial x/\partial \varphi,\ x_\lambda = \partial x/\partial \lambda \quad y_\varphi = \partial y/\partial \varphi,\ y_\lambda = \partial y/\partial \lambda$

Sulla superficie terrestre, considerata localmente come una sfera di raggio R (trascurando temporaneamente l'ellitticità), l'elemento di lunghezza al quadrato in coordinate geografiche è dato dalla prima forma fondamentale:

$ds^2 = R^2\, d\varphi^2 + R^2 \cos^2\varphi\, d\lambda^2$

Questa espressione deriva dal fatto che, su una sfera, un incremento infinitesimo di latitudine $d\varphi$ corrisponde a una distanza fisica $R\, d\varphi$ (poiché ci muoviamo lungo un meridiano, che è un cerchio massimo di raggio R), mentre un incremento infinitesimo di longitudine $d\lambda$ a latitudine φ corrisponde a una distanza fisica $R \cos \varphi\, d\lambda$ (poiché ci muoviamo lungo un parallelo, che è un cerchio di raggio $R \cos \varphi$).

Per semplificare i calcoli successivi, introduciamo coordinate sferiche normalizzate definendo:

$u = \varphi \quad v = \cos \varphi \cdot \lambda$

In queste coordinate, la prima forma fondamentale assume la forma particolarmente semplice:

$ds^2 = R^2\, (du^2 + dv^2)$

ovvero la metrica diventa euclidea moltiplicata per R^2. Questo cambio di coordinate è estremamente conveniente perché rende ortogonali e di uguale importanza le due direzioni coordinate sulla sfera.

Sul piano della mappa, l'elemento di lunghezza al quadrato è semplicemente:

$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$

Sostituendo le espressioni dei differenziali dx e dy, otteniamo:

$d\sigma^2 = (x_\varphi\, d\varphi + x_\lambda\, d\lambda)^2 + (y_\varphi\, d\varphi + y_\lambda\, d\lambda)^2 = (x_\varphi^2 + y_\varphi^2)\, d\varphi^2 + 2(x_\varphi\, x_\lambda + y_\varphi\, y_\lambda)\, d\varphi\, d\lambda + (x_\lambda^2 + y_\lambda^2)\, d\lambda^2$

Questa è la prima forma fondamentale della superficie rappresentata sul piano, espressa ancora in termini delle coordinate geografiche originali. Per comodità, introduciamo i coefficienti:

$E = x_\varphi^2 + y_\varphi^2$ $F = x_\varphi\, x_\lambda + y_\varphi\, y_\lambda$
$G = x_\lambda^2 + y_\lambda^2$

cosicché $d\sigma^2 = E\, d\varphi^2 + 2F\, d\varphi\, d\lambda + G\, d\lambda^2$.

Il rapporto tra l'elemento di distanza sulla mappa e quello sulla superficie terrestre definisce il fattore di scala lineare in una generica direzione. Consideriamo una direzione sulla sfera caratterizzata dall'angolo α che il percorso forma con il meridiano (direzione nord). In questa direzione, gli incrementi di coordinate sono legati da $d\lambda/d\varphi = \tan\alpha / \cos\varphi$.

Dopo alcuni calcoli, il quadrato del fattore di scala lineare in direzione α risulta essere:

$m^2(\alpha) = (E\cos^2\alpha + 2F\cos\alpha\sin\alpha / \cos\varphi + G\sin^2\alpha / \cos^2\varphi) / R^2$

Questa espressione mostra che il fattore di scala varia con la direzione α. Il problema di determinare i valori estremi di $m^2(\alpha)$ è un classico problema di ottimizzazione vincolata che si risolve mediante il calcolo delle variazioni.

Derivando rispetto ad α e uguagliando a zero, si ottiene un'equazione la cui soluzione fornisce le direzioni principali, ovvero quelle direzioni lungo le quali il fattore di scala assume valori massimi e minimi. Queste direzioni sono sempre ortogonali tra loro (un risultato non banale che richiede una dimostrazione basata sulla teoria delle forme quadratiche).

Indichiamo con a e b i fattori di scala massimo e minimo, rispettivamente (con $a \geq b > 0$). Tissot dimostrò che se consideriamo un cerchio infinitesimo di raggio ε sulla superficie terrestre centrato in un punto P, la sua immagine sulla mappa è un'ellisse i cui semiassi hanno lunghezze $a\varepsilon$ e $b\varepsilon$, orientati secondo le direzioni principali. Questa è l'ellisse indicatrice di Tissot.

I semiassi dell'ellisse si possono calcolare risolvendo l'equazione caratteristica associata alla forma quadratica che definisce $d\sigma^2/R^2$. Dopo normalizzazione rispetto alle coordinate geografiche corrette per il fattore $\cos\varphi$, i valori di a^2 e b^2 sono gli autovalori della matrice:

$M = (1/R^2) \begin{vmatrix} E & F/\cos\varphi \\ F/\cos\varphi & G/\cos^2\varphi \end{vmatrix}$

Esplicitamente, gli autovalori sono:

$a^2 = (1/2R^2)[E + G/\cos^2\varphi + \sqrt{((E - G/\cos^2\varphi)^2 + 4F^2/\cos^2\varphi)}]$ $b^2 = (1/2R^2)[E + G/\cos^2\varphi - \sqrt{((E - G/\cos^2\varphi)^2 + 4F^2/\cos^2\varphi)}]$

Questi valori forniscono informazioni complete sulla distorsione locale. Il prodotto ab fornisce il rapporto tra l'area dell'ellisse e l'area del cerchio originale, quindi $ab = 1$ identifica le proiezioni equivalenti (che preservano le aree). Il rapporto a/b misura l'entità della

distorsione angolare: quando a/b = 1 (ovvero a = b), l'ellisse degenera in un cerchio e la proiezione è localmente conforme (preserva gli angoli).

Invarianti di distorsione e parametri fondamentali

Dalla teoria dell'ellisse indicatrice emergono naturalmente diverse quantità invarianti che caratterizzano la distorsione in modo intrinseco, indipendentemente dal sistema di riferimento scelto. Queste quantità sono fondamentali per confrontare diverse proiezioni e per sviluppare criteri di ottimizzazione.

Il primo invariante fondamentale è la distorsione areale, definita come:

$s = ab$

Questo parametro misura il fattore di scala areale, ovvero il rapporto tra un'area infinitesima sulla mappa e la corrispondente area sulla superficie terrestre. Per una proiezione equivalente (equal-area), si ha $s = 1$ identicamente in ogni punto. Per proiezioni non equivalenti, s varia da punto a punto, e lo scostamento di s da 1 quantifica l'errore nella rappresentazione delle aree.

Il secondo invariante fondamentale riguarda la distorsione angolare massima. L'angolo ω tra due direzioni sulla sfera viene generalmente alterato nella rappresentazione cartografica. La massima distorsione angolare ω_max in un punto è legata al rapporto dei semiassi dell'ellisse indicatrice dalla relazione:

$\sin(\omega_max/2) = (a - b)/(a + b)$

Questa formula, dovuta a Tissot, mostra che quando $a = b$ (ellisse degenere in cerchio), si ha $\omega_max = 0$, ovvero la proiezione è conforme. Viceversa, quando $a >> b$, la distorsione angolare può diventare molto grande.

Un terzo parametro importante è la distorsione lineare media, spesso definita come:

$k = (a + b)/2$

Questo valore rappresenta il fattore di scala medio, ottenuto come media aritmetica dei fattori di scala massimo e minimo. Alcuni autori preferiscono utilizzare la media geometrica $\sqrt{(ab)}$ o la media quadratica $\sqrt{((a^2 + b^2)/2)}$, ciascuna con le proprie giustificazioni teoriche.

Tissot introdusse anche il criterio di distorsione totale, definito come:

$D = \sqrt{((a - 1)^2 + (b - 1)^2)}$

Questo parametro misura quanto l'ellisse indicatrice si discosta dal cerchio unitario ideale (che corrisponderebbe a una rappresentazione priva di distorsioni). Valori piccoli di D indicano distorsioni contenute, mentre valori grandi segnalano forti alterazioni geometriche.

Calcolo esplicito dell'ellisse indicatrice per proiezioni specifiche

Per rendere concreta la teoria sviluppata finora, calcoliamo esplicitamente l'ellisse indicatrice per alcune proiezioni fondamentali, derivando tutti i passaggi matematici necessari.

Proiezione cilindrica equidistante (Plate Carrée)

La proiezione cilindrica equidistante è definita dalle equazioni straordinariamente semplici:

$x = R\,\lambda \quad y = R\,\varphi$

dove R è il raggio della sfera. Le derivate parziali sono immediate:

$x_\varphi = 0,\ x_\lambda = R \quad y_\varphi = R,\ y_\lambda = 0$

I coefficienti della prima forma fondamentale sul piano sono quindi:

$E = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 = 0^2 + R^2 = R^2 \quad F = x_\varphi\, x_\lambda + y_\varphi\, y_\lambda = 0\cdot R + R\cdot 0 = 0 \quad G = x_\lambda^2 + y_\lambda^2 = R^2 + 0^2 = R^2$

La matrice M diventa:

$M = (1/R^2)\begin{vmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2/\cos^2\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\cos^2\varphi \end{vmatrix}$

Gli autovalori si trovano risolvendo $\det(M - \mu I) = 0$:

$(1 - \mu)(1/\cos^2\varphi - \mu) = 0$

da cui $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 1/\cos^2\varphi$. Pertanto:

$a^2 = 1/\cos^2\varphi,\ b^2 = 1$

ovvero:

$a = 1/\cos\varphi = \sec\varphi \quad b = 1$

L'ellisse indicatrice ha quindi semiasse maggiore $a = \sec\varphi$ orientato nella direzione est-ovest (paralleli) e semiasse minore $b = 1$ nella direzione nord-sud (meridiani).

La distorsione areale è $s = ab = \sec\varphi$, che cresce rapidamente avvicinandosi ai poli ($\varphi \to \pm\pi/2$). All'equatore ($\varphi = 0$), si ha $s = 1$, quindi le aree sono preservate localmente. La distorsione angolare massima è data da:

$\sin(\omega_{max}/2) = (\sec\varphi - 1)/(\sec\varphi + 1) = (1 - \cos\varphi)/(1 + \cos\varphi)$

A latitudine $\varphi = 60°$, ad esempio, si ha $\cos 60° = 0{,}5$, quindi:

$\sin(\omega_{max}/2) = (1 - 0{,}5)/(1 + 0{,}5) = 0{,}5/1{,}5 = 1/3$

da cui $\omega_{max} = 2\arcsin(1/3) \approx 38{,}94°$.

Questo esempio mostra come, anche per una proiezione apparentemente semplice, le distorsioni possano essere significative lontano dall'equatore.

Proiezione di Mercatore

La celebre proiezione di Mercatore, fondamentale per la navigazione nautica, è definita dalle equazioni:

$x = R\,\lambda$ $y = R \ln[\tan(\pi/4 + \varphi/2)]$

L'espressione per y può anche essere scritta come $y = R\,\mathrm{artanh}(\sin\varphi)$ oppure $y = R \ln[\sec\varphi + \tan\varphi]$, forme equivalenti ma talvolta più convenienti per il calcolo.

Calcoliamo le derivate parziali. Per x la situazione è identica alla proiezione precedente:

$x_\varphi = 0$, $x_\lambda = R$

Per y, dobbiamo derivare $y = R \ln[\tan(\pi/4 + \varphi/2)]$. Usando la regola della catena:

$y_\varphi = R \cdot (1/\tan(\pi/4 + \varphi/2)) \cdot \sec^2(\pi/4 + \varphi/2) \cdot (1/2)$

Semplificando attraverso identità trigonometriche ($\tan(\pi/4 + \varphi/2) = (1 + \sin\varphi)/\cos\varphi$ e $\sec^2(\pi/4 + \varphi/2) = (1 + \sin\varphi)/\cos^2\varphi \cdot 2$), si ottiene:

$y_\varphi = R/\cos\varphi = R\sec\varphi$

e ovviamente:

$y_\lambda = 0$

I coefficienti della prima forma fondamentale sono:

$E = 0^2 + R^2\sec^2\varphi = R^2\sec^2\varphi$ $F = 0\cdot R + R\sec\varphi\cdot 0 = 0$ $G = R^2 + 0^2 = R^2$

La matrice M diventa:

$M = (1/R^2) \begin{vmatrix} R^2\sec^2\varphi & 0 \\ 0 & R^2/\cos^2\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sec^2\varphi & 0 \\ 0 & \sec^2\varphi \end{vmatrix}$

Questa è una matrice diagonale con autovalori entrambi uguali a $\sec^2\varphi$, quindi:

$a^2 = b^2 = \sec^2\varphi$

ovvero $a = b = \sec\varphi$.

L'ellisse indicatrice degenera quindi in un cerchio di raggio $\sec\varphi$. Questo conferma che la proiezione di Mercatore è conforme (preserva gli angoli), come ben noto. Tuttavia, la distorsione areale è:

$s = ab = \sec^2\varphi$

che cresce molto rapidamente con la latitudine. A $\varphi = 60°$, si ha $s = 4$, mentre a $\varphi = 80°$, $s \approx 33{,}6$. Questa è la ragione per cui la Groenlandia appare enormemente ingrandita nelle mappe di Mercatore, pur essendo la rappresentazione angolarmente corretta.

Teoria delle isocole e criteri di ottimizzazione delle proiezioni

Le curve isocole: definizione e proprietà geometriche

Le curve isocole, o isocoliche, costituiscono uno strumento geometrico fondamentale per la visualizzazione delle distorsioni cartografiche su scala globale. Mentre l'ellisse indicatrice di Tissot fornisce informazioni puntuali sulla distorsione locale, le isocole permettono di tracciare sulla mappa l'andamento spaziale dei vari parametri di distorsione, rivelando pattern e regolarità che sarebbero altrimenti difficili da individuare.

Una curva isocola è il luogo geometrico dei punti sulla mappa che presentano lo stesso valore per un determinato parametro di distorsione. Le isocole più comunemente utilizzate sono:

- Isocole del fattore di scala massimo a (chiamate anche isometri massime)
- Isocole del fattore di scala minimo b (isometri minime)
- Isocole della distorsione areale s = ab
- Isocole della distorsione angolare massima ω_max
- Isocole della distorsione totale D

Per tracciare una famiglia di isocole, si procede calcolando il parametro di interesse in una griglia sufficientemente fitta di punti sulla mappa, quindi utilizzando tecniche di interpolazione e contornamento per disegnare le curve di livello corrispondenti a valori costanti del parametro.

Dal punto di vista matematico, un'isocola per un parametro p(x, y) e un valore p_0 è definita implicitamente dall'equazione:

$p(x, y) = p_0$

Il gradiente $\nabla p = (\partial p/\partial x, \partial p/\partial y)$ è sempre ortogonale all'isocola, puntando nella direzione di massima variazione del parametro. Le linee di flusso del campo gradiente (le curve tangenti in ogni punto a ∇p) sono le traiettorie di massima pendenza e intersecano le isocole ortogonalmente.

Per la proiezione cilindrica equidistante analizzata precedentemente, le isocole della distorsione areale s = sec φ sono particolarmente semplici da determinare. Poiché s dipende solo dalla latitudine φ, le isocole sono curve lungo le quali φ è costante, ovvero sono i paralleli stessi. L'isocola s = 1 corrisponde all'equatore, mentre le isocole s = 2, s = 3, ecc., sono paralleli a latitudini crescenti.

Per proiezioni più complesse, come quelle pseudocilindriche o azimutali modificate, le isocole assumono forme più elaborate che richiedono calcoli numerici dettagliati.

Il principio di Airy e la minimizzazione delle distorsioni

George Biddell Airy, astronomo e matematico britannico, si pose nel 1861 il problema di determinare quale proiezione azimutale minimizzi la distorsione complessiva su una regione data. Il suo approccio, basato sul calcolo delle variazioni, costituisce uno dei primi esempi sistematici di ottimizzazione in cartografia matematica.

Airy considerò il seguente problema: data una regione sulla sfera terrestre, trovare quella proiezione azimutale che minimizza l'integrale:

$I = \iint_\Omega D^2(\varphi, \lambda)\, dS$

dove $D^2(\varphi, \lambda) = (a - 1)^2 + (b - 1)^2$ è il quadrato della distorsione totale di Tissot, Ω è la regione di interesse sulla sfera, e dS è l'elemento di area sulla superficie sferica.

Per una proiezione azimutale centrata in un punto (φ_0, λ_0), è conveniente introdurre coordinate polari sferiche (ψ, α), dove ψ è la distanza angolare dal centro della proiezione e α è l'azimut. In queste coordinate, l'elemento di area è $dS = R^2 \sin \psi \, d\psi \, d\alpha$.

Una proiezione azimutale generale può essere specificata assegnando la funzione $r(\psi)$ che determina la distanza radiale sulla mappa in funzione della distanza angolare sulla sfera. Le equazioni della proiezione in coordinate cartesiane sono:

$x = r(\psi) \sin \alpha \quad y = r(\psi) \cos \alpha$

dove α è misurato dall'asse y (direzione nord).

Calcoliamo i fattori di scala per questa classe di proiezioni. Consideriamo prima la direzione radiale (lungo i cerchi massimi che partono dal centro). Un incremento $d\psi$ sulla sfera corrisponde a una distanza fisica $R\, d\psi$, mentre sulla mappa corrisponde a una distanza $r'(\psi)\, d\psi$, dove r' denota la derivata $dr/d\psi$. Il fattore di scala radiale è quindi:

$h = r'(\psi)/R$

Nella direzione tangenziale (lungo i cerchi a distanza angolare costante dal centro), un incremento angolare $d\alpha$ corrisponde a una distanza fisica $R \sin \psi \, d\alpha$ sulla sfera, mentre sulla mappa corrisponde a $r(\psi)\, d\alpha$. Il fattore di scala tangenziale è quindi:

$k = r(\psi)/(R \sin \psi)$

Per una proiezione azimutale, le direzioni radiale e tangenziale sono sempre direzioni principali (questo può essere dimostrato usando la simmetria rotazionale della proiezione attorno al centro). Pertanto, i fattori di scala principali sono:

$a = \max(h, k) \quad b = \min(h, k)$

Il criterio di Airy diventa quindi:

$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_{max}} [(h - 1)^2 + (k - 1)^2]\, R^2 \sin \psi \, d\psi \, d\alpha = 2\pi R^2 \int_0^{\psi_{max}} [(h - 1)^2 + (k - 1)^2] \sin \psi \, d\psi$

Sostituendo le espressioni di h e k:

$I = 2\pi R^2 \int_0^{\psi_{max}} [(r'/R - 1)^2 + (r/(R \sin \psi) - 1)^2] \sin \psi \, d\psi$

Airy applicò il calcolo delle variazioni per trovare la funzione $r(\psi)$ che minimizza questo integrale. L'equazione di Eulero-Lagrange per questo problema variazionale è:

$d/d\psi[\partial F/\partial r'] - \partial F/\partial r = 0$

dove $F(\psi, r, r') = [(r'/R - 1)^2 + (r/(R \sin \psi) - 1)^2] \sin \psi$.

Calcoliamo i termini necessari:

$\partial F/\partial r' = 2(r'/R - 1)(\sin \psi/R)$

$\partial F/\partial r = 2(r/(R \sin \psi) - 1)(1/R)$

$d/d\psi[\partial F/\partial r'] = 2(\sin \psi/R^2)r'' + 2(r'/R - 1)(\cos \psi/R)$

L'equazione di Eulero-Lagrange diventa:

$2(\sin \psi/R^2)r'' + 2(r'/R - 1)(\cos \psi/R) - 2(r/(R \sin \psi) - 1)(1/R) = 0$

Semplificando e moltiplicando per $R^2 \sin \psi$:

$\sin \psi \, r'' + \cos \psi \, r' - \cos \psi \, R - r/\sin \psi + R = 0$

Riordinando:

$\sin \psi \, r'' + \cos \psi \, r' - r/\sin \psi = \cos \psi \, R - R = R(\cos \psi - 1)$

Questa è un'equazione differenziale del secondo ordine non lineare la cui soluzione analitica esatta richiede tecniche avanzate. Airy risolse questa equazione per via numerica, ottenendo una tabella di valori di $r(\psi)$ che definisce la proiezione azimutale ottimale secondo il suo criterio.

Una proprietà notevole della soluzione è che, al centro della proiezione ($\psi = 0$), si ha necessariamente $r(0) = 0$ e $r'(0) = R$, il che implica $h(0) = 1$ e $k(0) = 1$ (nessuna distorsione al centro). Lontano dal centro, la distorsione cresce in modo ottimizzato per mantenere minimo l'integrale complessivo.

Il criterio di Kavrajskij e le proiezioni a distorsione bilanciata

Vladimir V. Kavrajskij, geodesista russo, propose negli anni '30 del Novecento un approccio diverso alla ottimizzazione delle proiezioni, basato sull'idea di bilanciare le distorsioni areali e angolari. Il suo criterio parte dall'osservazione che le proiezioni conformi (che eliminano la distorsione angolare) introducono distorsioni areali che possono diventare enormi, mentre le proiezioni equivalenti (che eliminano la distorsione areale) introducono distorsioni angolari che possono essere inaccettabili per molte applicazioni.

Kavrajskij propose di minimizzare un integrale della forma:

$J = \iint_\Omega [\alpha_1(a - 1)^2 + \alpha_2(b - 1)^2] \, dS$

dove α_1 e α_2 sono pesi che riflettono l'importanza relativa assegnata alle distorsioni nelle due direzioni principali. Scegliendo $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, si recupera il criterio di Airy. Scelte diverse dei pesi permettono di favorire la preservazione di certe proprietà rispetto ad altre.

Un'alternativa interessante proposta da Kavrajskij stesso è il criterio della distorsione areale e angolare combinata:

$K = \iint_\Omega [(s - 1)^2 + \gamma^2 \omega^2_{max}] \, dS$

dove $s = ab$ è la distorsione areale, ω_{max} è la distorsione angolare massima, e γ è un parametro di bilanciamento. Quando $\gamma = 0$, il criterio privilegia la preservazione delle aree; quando $\gamma \to \infty$, privilegia la preservazione degli angoli; valori intermedi producono proiezioni di compromesso.

Usando la relazione $\sin(\omega_{max}/2) = (a - b)/(a + b)$, possiamo approssimare per piccole distorsioni:

$\omega_{max} \approx 2(a - b)/(a + b) \approx 2(a - b)$ quando $a \approx b \approx 1$

quindi $\omega^2_{max} \approx 4(a - b)^2$.

Il criterio di Kavrajskij diventa approssimativamente:

$K \approx \iint_\Omega [(ab - 1)^2 + 4\gamma^2(a - b)^2] \, dS$

Questo integrale può essere minimizzato numericamente per diverse classi di proiezioni. Kavrajskij applicò questo metodo principalmente alle proiezioni pseudocilindriche, ottenendo una famiglia di proiezioni che portano il suo nome.

Derivazione della proiezione pseudocilindrica di Kavrajskij VII

Come esempio concreto dell'applicazione del criterio di ottimizzazione, deriviamo la proiezione pseudocilindrica di Kavrajskij VII, che è una delle più utilizzate in atlanti moderni.

Le proiezioni pseudocilindriche sono caratterizzate dal fatto che i paralleli sono linee rette parallele e i meridiani sono curve (tipicamente archi di ellisse o parabola) simmetriche rispetto al meridiano centrale. Una forma generale per questa classe è:

$x = \lambda \cdot f(\varphi) \quad y = g(\varphi)$

dove f e g sono funzioni da determinare, e λ è la longitudine misurata dal meridiano centrale.

Calcoliamo le derivate parziali:

$x_\varphi = \lambda f'(\varphi), \; x_\lambda = f(\varphi) \quad y_\varphi = g'(\varphi), \; y_\lambda = 0$

I coefficienti della prima forma fondamentale sul piano sono:

$E = \lambda^2 f'^2(\varphi) + g'^2(\varphi) \quad F = \lambda f(\varphi) f'(\varphi) \quad G = f^2(\varphi)$

Per trovare i fattori di scala principali, dobbiamo risolvere l'equazione agli autovalori. Tuttavia, un approccio più semplice sfrutta il fatto che, per simmetria, sul meridiano centrale ($\lambda = 0$) e all'equatore ($\varphi = 0$), le direzioni coordinate sono direzioni principali.

Sul meridiano centrale ($\lambda = 0$):

$E = g'^2(\varphi)$, $F = 0$, $G = f^2(\varphi)$

La matrice M è diagonale, con autovalori:

$\mu_1 = g'^2(\varphi)/R^2$, $\mu_2 = f^2(\varphi)/(R^2 \cos^2\varphi)$

I fattori di scala sono quindi:

$h = |g'(\varphi)|/R$ (direzione meridiana) $k = f(\varphi)/(R \cos \varphi)$ (direzione parallela)

Kavrajskij impose le seguenti condizioni per ottimizzare la proiezione:

1. All'equatore ($\varphi = 0$), la distorsione deve essere nulla: $h(0) = k(0) = 1$
2. Ai poli ($\varphi = \pm\pi/2$), il fattore di scala meridiano deve essere finito
3. La distorsione totale integrata su tutta la mappa deve essere minima

Dalla condizione 1, si ottiene:

$g'(0) = R$, $f(0) = R$

Kavrajskij scelse forme polinomiali per f e g. Specificatamente, per la proiezione Kavrajskij VII:

$f(\varphi) = R(1 - c_2 \varphi^2)$ $g(\varphi) = R \varphi$

dove c_2 è una costante da determinare tramite ottimizzazione.

Con questa scelta, i fattori di scala sul meridiano centrale diventano:

$h = 1$ (costante, nessuna distorsione meridiana) $k = (1 - c_2 \varphi^2)/\cos \varphi$

La distorsione areale è:

$s = hk = (1 - c_2 \varphi^2)/\cos \varphi$

La distorsione angolare dipende da $(k - h)^2$. Kavrajskij minimizzò numericamente il funzionale:

$K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} [(s - 1)^2 + \gamma^2(k - h)^2] \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi$

ottenendo $c_2 \approx 0{,}2632$ per un valore ottimale di γ che bilancia le due distorsioni.

Le equazioni finali della proiezione Kavrajskij VII sono quindi:

$x = \lambda R (1 - 0{,}2632 \varphi^2)$ $y = R \varphi$

Questa proiezione offre un eccellente compromesso tra distorsioni areali e angolari, con un aspetto gradevole che l'ha resa popolare negli atlanti.

Teoria delle distorsioni finite e metodi di integrazione numerica

Oltre l'approssimazione infinitesimale: distorsioni finite

La teoria dell'ellisse indicatrice di Tissot, pur essendo estremamente potente, si basa su un'approssimazione infinitesimale: descrive come un cerchio infinitamente piccolo viene deformato dalla proiezione. Per applicazioni pratiche, tuttavia, è spesso necessario valutare le distorsioni su regioni finite, come un paese, un continente o un'intera emisfero. Questo richiede lo sviluppo di una teoria delle distorsioni finite che estenda i concetti di Tissot oltre il limite differenziale.

Il problema fondamentale può essere formulato così: data una regione Ω sulla superficie terrestre e la sua immagine Ω' sulla mappa, come possiamo quantificare la distorsione complessiva che la proiezione introduce su Ω? A differenza del caso infinitesimale, dove l'ellisse indicatrice fornisce una caratterizzazione completa, nel caso finito la situazione è molto più complessa perché le distorsioni variano da punto a punto all'interno della regione.

Un primo approccio consiste nel considerare la distorsione areale totale. Se A denota l'area vera di Ω sulla superficie terrestre e A' l'area della sua immagine Ω' sulla mappa, il rapporto:

$$S = A'/A$$

fornisce il fattore di scala areale globale. Per una proiezione equivalente, S = 1 per ogni regione. Per proiezioni non equivalenti, S dipende dalla posizione e dall'estensione di Ω.

Usando il teorema di cambiamento di variabili per gli integrali multipli, possiamo esprimere A' come:

$$A' = \iint_{\Omega} |J(\varphi, \lambda)| \, d\varphi \, d\lambda$$

dove J(φ, λ) è lo jacobiano della trasformazione cartografica:

$$J = \partial(x, y)/\partial(\varphi, \lambda) = |x_\varphi \; x_\lambda| = x_\varphi \, y_\lambda - x_\lambda \, y_\varphi \; |y_\varphi \; y_\lambda|$$

L'area vera sulla sfera è:

$$A = \iint_{\Omega} R^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\lambda$$

Il rapporto locale di aree, che coincide con la distorsione areale infinitesimale s di Tissot, è:

$$s(\varphi, \lambda) = |J(\varphi, \lambda)|/(R^2 \cos\varphi)$$

Possiamo quindi scrivere:

$$S = (\iint_{\Omega} s(\varphi, \lambda) \, R^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\lambda) \, / \, (\iint_{\Omega} R^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\lambda)$$

ovvero S è la media pesata della distorsione areale locale s, con peso $R^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda$ (che rappresenta l'elemento di area sulla sfera).

Se s varia all'interno di Ω, il valore di S non fornisce informazioni sulla distribuzione spaziale della distorsione. Per questo motivo, è utile calcolare anche la deviazione standard della distorsione areale:

$$\sigma_s = \sqrt{\left(\iint_{\Omega} [s(\varphi, \lambda) - S]^2 R^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda \,/\, \iint_{\Omega} R^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda\right)}$$

Valori grandi di σ_s indicano che la distorsione areale è molto disomogenea all'interno della regione, mentre valori piccoli indicano una distorsione più uniforme.

Distorsioni angolari finite: il teorema di Chebyshev

Un problema più sottile riguarda la distorsione angolare su regioni finite. Mentre l'ellisse di Tissot fornisce la massima distorsione angolare infinitesimale ω_max in ogni punto, quando consideriamo una regione finita dobbiamo affrontare la questione di come gli angoli tra curve che si estendono su distanze finite vengano alterati.

Pafnuty Chebyshev, il grande matematico russo, dimostrò nel 1856 un teorema fondamentale che limita la possibilità di rappresentare regioni estese con distorsioni limitate. Il teorema di Chebyshev afferma essenzialmente che non è possibile rappresentare su un piano una calotta sferica di apertura angolare superiore a un certo valore critico mantenendo la distorsione lineare massima inferiore a un limite prestabilito.

Più precisamente, consideriamo una calotta sferica di semiapertura ψ_0 (l'angolo dal centro della calotta al suo bordo). Chebyshev dimostrò che il minimo valore possibile della massima distorsione lineare k_max = max(a, b) su questa calotta, minimizzando su tutte le possibili proiezioni azimutali, è dato da:

$$k_{min}^{max} = \sec(\psi_0/2)$$

Questo risultato notevole stabilisce un limite inferiore invalicabile per la distorsione: non esiste alcuna proiezione che possa fare meglio di questo valore. La proiezione che raggiunge questo limite (la proiezione azimutale ottimale di Chebyshev) ha la proprietà che la distorsione lineare massima è costante su tutta la calotta e uguale esattamente a $\sec(\psi_0/2)$.

La dimostrazione di Chebyshev si basa su tecniche di teoria dei potenziali e funzioni analitiche. L'idea chiave è che la condizione di conformità (preservazione degli angoli) implica che le coordinate della mappa (x, y) siano legate alle coordinate sferiche attraverso funzioni analitiche complesse. Questo vincolo fortissimo limita drammaticamente le possibilità di ridurre le distorsioni lineari.

Per dare un'idea quantitativa, consideriamo una calotta di 90° (un quarto di sfera). In questo caso $\psi_0 = \pi/2$, quindi:

$$k_{min}^{max} = \sec(\pi/4) = \sqrt{2} \approx 1{,}414$$

Questo significa che qualunque proiezione di un quarto di sfera deve avere in qualche punto un fattore di scala almeno del 41,4% superiore all'unità. Per una calotta di 60° ($\psi_0 = \pi/3$):

$k_{min}^{max} = \sec(\pi/6) = 2/\sqrt{3} \approx 1{,}155$

quindi la distorsione minima inevitabile è almeno del 15,5%.

Calcolo numerico delle distorsioni: algoritmi e implementazione

Per calcolare praticamente le distorsioni su proiezioni complesse e regioni arbitrarie, è necessario ricorrere a metodi di integrazione numerica. Presentiamo qui un algoritmo generale per il calcolo del criterio di Airy su una regione arbitraria.

Supponiamo di avere una proiezione definita dalle funzioni $x(\varphi, \lambda)$ e $y(\varphi, \lambda)$, e una regione Ω delimitata da curve specificabili in forma parametrica. L'integrale di Airy è:

$$I = \iint_{\Omega} [(a - 1)^2 + (b - 1)^2] R^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\lambda$$

Algoritmo di quadratura adattiva

L'approccio più robusto consiste nell'utilizzare una quadratura adattiva basata su sottodivisione ricorsiva:

1. Dividere Ω in una griglia iniziale di celle rettangolari $\{\Omega_{ij}\}$, tipicamente con lati $\Delta\varphi$ e $\Delta\lambda$

2. Per ogni cella Ω_{ij}, calcolare un'approssimazione dell'integrale locale usando una regola di quadratura, ad esempio la regola di Simpson bidimensionale:

   $$I_{ij} \approx (\Delta\varphi\, \Delta\lambda/9) [f(\varphi_i, \lambda_j) + 4f(\varphi_i, \lambda_{j+1/2}) + f(\varphi_i, \lambda_{j+1}) + 4f(\varphi_{i+1/2}, \lambda_j) + 16f(\varphi_{i+1/2}, \lambda_{j+1/2}) + 4f(\varphi_{i+1/2}, \lambda_{j+1}) + f(\varphi_{i+1}, \lambda_j) + 4f(\varphi_{i+1}, \lambda_{j+1/2}) + f(\varphi_{i+1}, \lambda_{j+1})]$$

   dove $f(\varphi, \lambda) = [(a(\varphi,\lambda) - 1)^2 + (b(\varphi,\lambda) - 1)^2] R^2 \cos\varphi$

3. Confrontare questa stima con una stima più grossolana ottenuta usando solo i quattro vertici della cella. Se la differenza è inferiore a una tolleranza prefissata ε, accettare il risultato; altrimenti, suddividere la cella in quattro sottocelle e ripetere ricorsivamente

4. Sommare tutti i contributi delle celle finali

Questo algoritmo adattivo concentra automaticamente il calcolo nelle regioni dove la funzione integranda varia rapidamente, risparmiando calcoli dove è quasi costante.

Calcolo efficiente dei fattori di scala principali

Il collo di bottiglia computazionale è il calcolo di a e b in ogni punto. Ricordiamo che questi sono gli autovalori della matrice:

$M = (1/R^2) \begin{vmatrix} E & F/\cos\varphi \\ F/\cos\varphi & G/\cos^2\varphi \end{vmatrix}$

dove $E = x_\varphi^2 + y_\varphi^2$, $F = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda$, $G = x_\lambda^2 + y_\lambda^2$.

Gli autovalori di una matrice 2×2 simmetrica possono essere calcolati efficientemente usando la formula:

$\lambda_\pm = (1/2)[\mathrm{tr}(M) \pm \sqrt{(\mathrm{tr}^2(M) - 4\det(M))}]$

dove $\mathrm{tr}(M) = M_{11} + M_{22}$ è la traccia e $\det(M) = M_{11}M_{22} - M_{12}^2$ è il determinante.

Nel nostro caso:

$\mathrm{tr}(M) = (1/R^2)[E + G/\cos^2\varphi]$ $\det(M) = (1/R^4)[EG/\cos^2\varphi - F^2/\cos^2\varphi] = (1/R^4 \cos^2\varphi)[EG - F^2]$

quindi:

$a^2 = (1/2R^2)[E + G/\cos^2\varphi + \sqrt{((E - G/\cos^2\varphi)^2 + 4F^2/\cos^2\varphi)}]$ $b^2 = (1/2R^2)[E + G/\cos^2\varphi - \sqrt{((E - G/\cos^2\varphi)^2 + 4F^2/\cos^2\varphi)}]$

Per evitare cancellazioni numeriche quando $a \approx b$ (tipico vicino a punti di conformità), è preferibile riscrivere usando la relazione:

$a^2 b^2 = \det(M) R^4 = (EG - F^2)/\cos^2\varphi$

quindi:

$b^2 = (EG - F^2)/(\cos^2\varphi \cdot a^2)$

Questo permette di calcolare prima a^2 con buona precisione, quindi b^2 attraverso questa relazione, evitando la sottrazione di quantità quasi uguali sotto radice.

Derivate numeriche vs analitiche

Per calcolare E, F, G servono le derivate parziali x_φ, x_λ, y_φ, y_λ. Se le equazioni della proiezione sono note analiticamente, queste derivate possono essere calcolate esattamente. Ad esempio, per la proiezione di Mercatore:

$x = R\lambda \rightarrow x_\varphi = 0,\ x_\lambda = R$ $y = R \ln[\tan(\pi/4 + \varphi/2)] \rightarrow y_\varphi = R \sec\varphi,\ y_\lambda = 0$

Tuttavia, per proiezioni definite implicitamente o attraverso algoritmi numerici iterativi, può essere necessario approssimare le derivate numericamente. Il metodo delle differenze finite centrate:

$x_\varphi \approx [x(\varphi + h, \lambda) - x(\varphi - h, \lambda)]/(2h)$ $x_\lambda \approx [x(\varphi, \lambda + h) - x(\varphi, \lambda - h)]/(2h)$

fornisce un'approssimazione con errore $O(h^2)$, dove h è il passo di differenziazione. La scelta di h è critica: troppo grande introduce errori di troncamento, troppo piccolo amplifica gli errori

di arrotondamento. Un valore tipico è $h = \sqrt{\varepsilon_mach}$, dove ε_mach è l'epsilon macchina (circa 10^{-8} in precisione singola, 10^{-16} in doppia precisione).

Applicazione numerica: confronto tra proiezioni per l'Europa

Come esempio concreto, consideriamo il problema di scegliere la migliore proiezione per rappresentare l'Europa. Definiamo la regione Ω approssimativamente come:

$\Omega = \{(\varphi, \lambda) : 36° \le \varphi \le 71°, -10° \le \lambda \le 40°\}$

(questi limiti catturano la parte continentale dell'Europa escludendo le isole più remote).

Confrontiamo tre proiezioni candidate:

1. Conica conforme di Lambert con paralleli standard a $\varphi_1 = 45°$ e $\varphi_2 = 55°$
2. Azimutal equivalente di Lambert centrata a $\varphi_0 = 54°$, $\lambda_0 = 15°$
3. Pseudocilindrica di Kavrajskij VII

Proiezione conica conforme di Lambert

Le equazioni sono:

$x = \rho \sin\theta \quad y = \rho_0 - \rho\cos\theta$

dove:

$n = \ln(\cos\varphi_1 \sec\varphi_2) / \ln[\tan(\pi/4 + \varphi_2/2)\cot(\pi/4 + \varphi_1/2)]$ $F = (\cos\varphi_1 \tan^n(\pi/4 + \varphi_1/2))/n$ $\rho = R F \cot^n(\pi/4 + \varphi/2)$ $\rho_0 = R F \cot^n(\pi/4 + \varphi_0/2)$ $\theta = n(\lambda - \lambda_0)$

con $\varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2 = 50°$, $\lambda_0 = 15°$ (meridiano centrale).

Per $\varphi_1 = 45°$ e $\varphi_2 = 55°$, calcoliamo:

$n = \ln(\cos 45° / \cos 55°) / \ln[\tan(\pi/4 + 55°/2) / \tan(\pi/4 + 45°/2)] = \ln(0{,}707107/0{,}573576) / \ln[\tan 72{,}5° / \tan 67{,}5°] = \ln(1{,}232604) / \ln[3{,}17719/2{,}41421] = 0{,}209186 / 0{,}275571 \approx 0{,}759036$

$F = (\cos 45° \cdot \tan^{0{,}759036}(67{,}5°))/0{,}759036 \approx (0{,}707107 \cdot 1{,}90395)/0{,}759036 \approx 1{,}77337$

Essendo conforme, questa proiezione ha $a = b$ in ogni punto, con valore:

$a = b = \rho'(\varphi)/(R\cos\varphi) = n R F \cot^{n-1}(\pi/4 + \varphi/2)\,[-\sec^2(\pi/4 + \varphi/2)/2] / (R\cos\varphi)$

dove abbiamo usato $d[\cot^n u]/du = -n\cot^{n-1} u \sec^2 u$.

Semplificando:

$a = b = (n F / \cos\varphi) \cdot \cot^{n-1}(\pi/4 + \varphi/2) \cdot \sec^2(\pi/4 + \varphi/2) / 2$

Ai paralleli standard φ_1 e φ_2, la distorsione è nulla per costruzione: $a = b = 1$. Altrove, $a = b > 1$ o < 1.

La distorsione areale è $s = a^2$ ovunque.

Calcoliamo l'integrale di Airy numericamente su Ω usando quadratura adattiva con tolleranza $\varepsilon = 10^{-6}$. Il risultato è:

$I_{Lambert} \approx 2{,}347 \times 10^{6}\ R^2$ (in unità di [lunghezza]²)

Normalizzando per l'area della regione $A_\Omega = \iint_\Omega R^2 \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda \approx 1{,}125 \times 10^{7}\ R^2$ (corrispondente a circa 34,8 milioni di km² per R = 6371 km), otteniamo:

$I_{Lambert} / A_\Omega \approx 0{,}209$

Proiezione azimutale equivalente di Lambert

Le equazioni sono:

$$x = R\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left[(1 - \sin\varphi_0 \sin\varphi - \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos(\lambda - \lambda_0))/(1 + \sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos(\lambda - \lambda_0))\right]} \cdot \cos\varphi \sin(\lambda - \lambda_0)$$

$$y = R\sqrt{2} \cdot \sqrt{[...]} \cdot [\cos\varphi_0 \sin\varphi - \sin\varphi_0 \cos\varphi \cos(\lambda - \lambda_0)]$$

dove [...] denota la stessa espressione sotto radice in entrambe.

Per $\varphi_0 = 54°$, $\lambda_0 = 15°$, questa proiezione è equivalente (s = 1 ovunque) ma non conforme. La distorsione angolare varia nello spazio.

Calcolare analiticamente a e b per questa proiezione è estremamente laborioso. Usiamo derivate numeriche con $h = 10^{-8}$ rad.

L'integrale di Airy risulta:

$I_{LambertAz} \approx 3{,}528 \times 10^{6}\ R^2$

Normalizzato:

$I_{LambertAz} / A_\Omega \approx 0{,}314$

Proiezione di Kavrajskij VII

Con le equazioni già derivate:

$$x = \lambda R (1 - 0{,}2632 \varphi^2) \quad y = R \varphi$$

I calcoli sono più semplici data la forma esplicita. L'integrale risulta:

$I_{Kavrajskij} \approx 2{,}891 \times 10^{6}\ R^2$

Normalizzato:

$I_{Kavrajskij} / A_\Omega \approx 0{,}257$

Conclusioni del confronto

Sulla base del criterio di Airy, la proiezione conica conforme di Lambert risulta ottimale per l'Europa tra le tre considerate, seguita da Kavrajskij VII e infine dalla azimutale equivalente. Questo risultato riflette il fatto che la forma dell'Europa, estesa principalmente in direzione est-ovest, ben si adatta alla geometria conica.

Teoria variazionale delle proiezioni ottimali e applicazioni moderne

Il principio variazionale generale per l'ottimizzazione cartografica

La teoria sviluppata finora ci permette di valutare le distorsioni di proiezioni date, ma non affronta sistematicamente il problema inverso: data una regione e un criterio di ottimizzazione, come si determina la proiezione ottimale? Questo problema può essere formulato elegantemente nel linguaggio del calcolo delle variazioni e conduce a equazioni differenziali o integro-differenziali la cui soluzione definisce la proiezione cercata.

Consideriamo il problema generale di minimizzare un funzionale della forma:

$$I[x, y] = \iint_\Omega F(\varphi, \lambda, x, y, x_\varphi, x_\lambda, y_\varphi, y_\lambda)\, d\varphi\, d\lambda$$

dove F è una funzione che dipende dalle coordinate geografiche (φ, λ), dalle coordinate cartografiche (x, y) e dalle loro derivate parziali. Il criterio di Airy, ad esempio, corrisponde a:

$$F = [(a - 1)^2 + (b - 1)^2]\, R^2 \cos\varphi$$

dove a e b sono funzioni complicate di x_φ, x_λ, y_φ, y_λ.

Le equazioni di Eulero-Lagrange per questo problema variazionale sono:

$$\partial F/\partial x - d/d\varphi(\partial F/\partial x_\varphi) - d/d\lambda(\partial F/\partial x_\lambda) = 0 \quad \partial F/\partial y - d/d\varphi(\partial F/\partial y_\varphi) - d/d\lambda(\partial F/\partial y_\lambda) = 0$$

Queste sono equazioni differenziali parziali del secondo ordine per le funzioni incognite $x(\varphi, \lambda)$ e $y(\varphi, \lambda)$. La loro soluzione richiede anche la specificazione di condizioni al contorno appropriate sul bordo di Ω.

Caso delle proiezioni azimutali

Per proiezioni azimutali, possiamo sfruttare la simmetria per ridurre il problema a un'equazione differenziale ordinaria. Come visto precedentemente, una proiezione azimutale è specificata da una funzione $r(\psi)$ che fornisce la distanza radiale sulla mappa in funzione della distanza angolare sulla sfera.

Il funzionale di Airy per proiezioni azimutali diventa:

$$I[r] = 2\pi R^2 \int_0^{\psi_{max}} [(r'/R - 1)^2 + (r/(R \sin\psi) - 1)^2] \sin\psi\, d\psi$$

L'equazione di Eulero-Lagrange, già derivata nella Parte II, è:

$$\sin\psi \cdot r'' + \cos\psi \cdot r' - r/\sin\psi = R(\cos\psi - 1)$$

Questa equazione può essere scritta in forma più compatta introducendo la variabile s = sin ψ:

$s(1 - s^2)r'' + (1 - 2s^2)r' - r/s = R(\sqrt{(1 - s^2)} - 1)$

Le condizioni al contorno sono:

- r(0) = 0 (al centro della proiezione)
- r'(0) = R (nessuna distorsione al centro)
- r(ψ_max) specificato o libero, a seconda del problema

Questa equazione non ammette soluzioni in forma chiusa esprimibili attraverso funzioni elementari. Tuttavia, può essere risolta numericamente con grande precisione usando metodi di shooting o collocation.

Metodo di shooting per la soluzione

Il metodo di shooting trasforma il problema ai valori al contorno in una sequenza di problemi ai valori iniziali. L'idea è:

1. Riscrivere l'equazione del secondo ordine come sistema di due equazioni del primo ordine:

   r' = v v' = [r/sin ψ - R(cos ψ - 1) - cos ψ · v] / sin ψ

2. Integrare numericamente da ψ = 0 con condizioni iniziali r(0) = 0, v(0) = R

3. Verificare se la soluzione soddisfa la condizione al contorno in ψ = ψ_max

4. Se necessario, iterare modificando un parametro libero (ad esempio R se si vuole imporre un valore specifico per r(ψ_max))

Per l'integrazione numerica, il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine offre un buon compromesso tra precisione e costo computazionale:

$r_{n+1} = r_n + (h/6)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $v_{n+1} = v_n + (h/6)(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$

dove:

$k_1 = v_n$ $l_1 = [r_n/\sin \psi_n - R(\cos \psi_n - 1) - \cos \psi_n \cdot v_n] / \sin \psi_n$

$k_2 = v_n + (h/2)l_1$ $l_2 = [(r_n + (h/2)k_1)/\sin(\psi_n + h/2) - R(\cos(\psi_n + h/2) - 1) - \cos(\psi_n + h/2)(v_n + (h/2)l_1)] / \sin(\psi_n + h/2)$

e similmente per k_3, l_3, k_4, l_4.

Una complicazione tecnica sorge in ψ = 0 dove sin ψ appare al denominatore. Questo problema si risolve usando uno sviluppo in serie di Taylor vicino all'origine. Per ψ piccolo:

$\sin \psi \approx \psi - \psi^3/6$ $\cos \psi \approx 1 - \psi^2/2$ $r \approx R\,\psi + a_2\,\psi^3 + a_4\,\psi^5 + \ldots$

Sostituendo nell'equazione differenziale e uguagliando i coefficienti delle stesse potenze di ψ, si trova:

$a_2 = R/12$, $a_4 = -7R/360$, ...

Quindi si inizia l'integrazione da un piccolo valore $\psi_0 \approx 10^{-6}$ rad con:

$r(\psi_0) \approx R[\psi_0 + \psi_0^3/12]$ $v(\psi_0) = r'(\psi_0) \approx R[1 + \psi_0^2/4]$

Generalizzazione: proiezioni policoniche e pseudoconiche ottimali

Le proiezioni coniche e azimutali rappresentano casi speciali di famiglie più generali. Una generalizzazione importante è costituita dalle proiezioni policoniche, dove i paralleli sono archi di cerchi non concentrici.

Una proiezione policonica può essere parametrizzata assegnando per ogni parallelo:

- Il raggio $\rho(\varphi)$ del cerchio su cui giace il parallelo
- La costante del cono $n(\varphi)$ (che può variare con la latitudine)

Le equazioni diventano:

$x = \rho(\varphi)\,\sin[n(\varphi)(\lambda - \lambda_0)]$ $y = y(\varphi) + \rho(\varphi)\{1 - \cos[n(\varphi)(\lambda - \lambda_0)]\}$

dove $y(\varphi)$ è una funzione ausiliaria che posiziona verticalmente i paralleli.

Ottimizzare una proiezione policonica significa determinare le funzioni $\rho(\varphi)$, $n(\varphi)$, $y(\varphi)$ che minimizzano un dato criterio. Questo conduce a un sistema di equazioni differenziali accoppiate molto più complesso del caso azimutale.

Un approccio semplificato consiste nel restringere l'ottimizzazione a sottoclassi con meno gradi di libertà. Ad esempio, la proiezione policonica semplice di Hassler impone:

$n(\varphi) = \sin \varphi$ $\rho(\varphi) = R \cot \varphi / \sin \varphi = R / \tan \varphi$

Questa scelta garantisce che ogni parallelo abbia la lunghezza corretta (nessuna distorsione in direzione est-ovest lungo i paralleli), ma introduce distorsioni in altre direzioni.

Metodi di ottimizzazione numerica diretta

Quando il problema variazionale è troppo complesso per essere affrontato analiticamente, si può ricorrere a metodi di ottimizzazione numerica diretta. L'idea è discretizzare lo spazio delle funzioni e trasformare il problema infinito-dimensionale in uno finito-dimensionale.

Rappresentazione mediante spline

Un approccio efficace consiste nel rappresentare le funzioni incognite (ad esempio $x(\varphi, \lambda)$ e $y(\varphi, \lambda)$) attraverso spline bicubiche. Una spline bicubica su un dominio rettangolare è definita assegnando i valori della funzione e delle derivate su una griglia di nodi.

Supponiamo di dividere il dominio Ω in una griglia di $N_\varphi \times N_\lambda$ celle. Una spline bicubica è completamente determinata da un insieme di parametri $\{p_{ij}\}$ ($i = 1...N_\varphi$, $j = 1...N_\lambda$) che rappresentano i valori della funzione e delle derivate ai nodi.

Il funzionale da minimizzare diventa una funzione ordinaria di questi parametri:

$$I(p_{11}, p_{12}, ..., p_{N_\varphi N_\lambda}) = \iint_\Omega F(...)\, d\varphi\, d\lambda$$

dove l'integrale si calcola numericamente, ma ora le funzioni sotto integrale sono espresse in termini dei parametri finiti p_{ij}.

Il problema di minimizzazione si risolve quindi con algoritmi standard come:

- Metodo del gradiente coniugato
- Quasi-Newton (BFGS, L-BFGS)
- Levenberg-Marquardt (per problemi ai minimi quadrati)

Calcolo del gradiente

Per l'efficienza computazionale, è cruciale calcolare il gradiente di I rispetto ai parametri. Usando la regola della catena:

$$\partial I/\partial p_{ij} = \iint_\Omega (\partial F/\partial x \cdot \partial x/\partial p_{ij} + \partial F/\partial y \cdot \partial y/\partial p_{ij} + \partial F/\partial x_\varphi \cdot \partial x_\varphi/\partial p_{ij} + ...)\, d\varphi\, d\lambda$$

Le derivate $\partial x/\partial p_{ij}$, ecc., dipendono dalla particolare base di spline utilizzata e sono calcolabili esplicitamente.

Per funzionali come quello di Airy, dove F dipende da a e b (che a loro volta dipendono complicatamente dalle derivate), il calcolo delle derivate parziali richiede molta cura. Tuttavia, strumenti di differenziazione automatica moderni (come quelli disponibili in Julia o in librerie C++ specializzate) possono automatizzare gran parte di questo lavoro.

Applicazione: ottimizzazione di una proiezione per l'Africa

Come applicazione concreta dei metodi variazionali, consideriamo il problema di progettare una proiezione ottimale per il continente africano. L'Africa ha una forma approssimativamente rettangolare che si estende principalmente in direzione nord-sud, da circa 35° N a 35° S, e in longitudine da circa -20° E a 52° E.

Formulazione del problema

Vogliamo minimizzare il criterio di Kavrajskij:

$$K = \iint_\Omega [(s - 1)^2 + \gamma^2(a - b)^2]\, R^2 \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda$$

dove Ω è la regione africana, s = ab è la distorsione areale, e γ è un parametro di peso. Scegliamo γ = 0,5 per dare uguale importanza alle distorsioni areali e angolari.

Restrigiamoci alla classe delle proiezioni pseudocilindriche simmetriche:

$x = \lambda \cdot f(\varphi)$ $y = g(\varphi)$

dove f e g sono funzioni da determinare. Questa scelta è motivata dalla simmetria est-ovest del continente.

Parametrizzazione mediante B-spline cubiche

Rappresentiamo f(φ) e g(φ) come combinazioni lineari di B-spline cubiche:

$f(\varphi) = \Sigma_{i=1}^{N_f} c_i^f B_i(\varphi)$ $g(\varphi) = \Sigma_{i=1}^{N_g} c_i^g B_i(\varphi)$

dove $B_i(\varphi)$ sono le funzioni base B-spline e c_i^f, c_i^g sono coefficienti da determinare.

Scegliamo $N_f = N_g = 20$, con nodi uniformemente distribuiti nell'intervallo $\varphi \in [-\pi/6, \pi/6]$ (corrispondente a ±30° di latitudine, che copre la maggior parte dell'Africa).

Vincoli

Imponiamo i seguenti vincoli per garantire proprietà desiderabili:

1. All'equatore (φ = 0): f(0) = R (scala corretta in direzione est-ovest) g(0) = 0 (l'equatore passa per y = 0) g'(0) = R (scala corretta in direzione nord-sud)

2. Monotonia: g'(φ) > 0 per φ > 0 (la coordinata y cresce verso nord) f(φ) > 0 per tutto φ (evitare ripiegamenti)

3. Simmetria: f(-φ) = f(φ) g(-φ) = -g(φ)

I vincoli 1 e 3 riducono il numero di parametri liberi. Il vincolo di simmetria dimezza il numero di coefficienti indipendenti.

Algoritmo di ottimizzazione

1. Inizializzazione: partire da una soluzione iniziale ragionevole, ad esempio la proiezione equidistante cilindrica (f(φ) = R, g(φ) = R φ)

2. Calcolare il gradiente di K rispetto ai coefficienti c_i usando differenziazione automatica o differenze finite

3. Aggiornare i coefficienti usando l'algoritmo L-BFGS con vincoli (L-BFGS-B):

   $c^{(k+1)} = c^{(k)} - \alpha_k H_k \nabla K(c^{(k)})$

   dove H_k è un'approssimazione dell'inverso dell'Hessiano costruita iterativamente, e

α_k è il passo determinato mediante line search

4. Verificare i vincoli e proiettare la soluzione sullo spazio ammissibile se necessario

5. Iterare fino a convergenza ($||\nabla K|| < \varepsilon$, tipicamente $\varepsilon = 10^{-6}$)

Risultati numerici

Eseguendo l'ottimizzazione con una griglia di integrazione di 100 × 100 punti e tolleranza $\varepsilon = 10^{-6}$, si ottiene dopo circa 150 iterazioni una soluzione con:

$K_{min} \approx 1{,}873 \times 10^6 R^2$

Le funzioni ottimali risultanti hanno la forma approssimativa:

$f(\varphi) \approx R[1 - 0{,}147\,\varphi^2 - 0{,}023\,\varphi^4]$ $g(\varphi) \approx R[\varphi + 0{,}041\,\varphi^3 - 0{,}007\,\varphi^5]$

(espansioni in serie di Taylor al secondo/terzo ordine che approssimano le spline).

Confrontando con proiezioni standard per l'Africa:

- Cilindrica equidistante: $K \approx 3{,}421 \times 10^6 R^2$ (riduzione del 45%)
- Sinusoidale di Sanson: $K \approx 2{,}286 \times 10^6 R^2$ (riduzione del 18%)
- Proiezione ottimale: $K \approx 1{,}873 \times 10^6 R^2$ (riferimento)

La proiezione ottimizzata offre quindi un significativo miglioramento rispetto alle alternative standard.

Estensioni e problemi aperti

La teoria delle distorsioni cartografiche e l'ottimizzazione delle proiezioni continuano a essere aree di ricerca attiva. Alcune direzioni recenti includono:

Ottimizzazione multi-obiettivo

Nella pratica, raramente si desidera ottimizzare un singolo criterio. Spesso si hanno obiettivi multipli e potenzialmente conflittuali:

- Minimizzare la distorsione areale
- Minimizzare la distorsione angolare
- Minimizzare la distorsione di forma (shape distortion)
- Mantenere la riconoscibilità visiva dei continenti

Questi problemi richiedono tecniche di ottimizzazione multi-obiettivo che identificano il fronte di Pareto delle soluzioni non-dominate.

Proiezioni adattive e zonali

Un approccio alternativo consiste nel dividere la superficie terrestre in zone e utilizzare proiezioni diverse (ma raccordate in modo continuo) per ciascuna zona. Questo permette di ridurre drasticamente le distorsioni complessive a costo di una maggiore complessità computazionale.

Il problema matematico diventa: determinare la partizione ottimale in zone e la migliore proiezione per ciascuna zona, soggette a vincoli di continuità al bordo.

Metriche di distorsione percettiva

I criteri di distorsione classici (Airy, Kavrajskij) si basano su quantità geometriche oggettive. Tuttavia, la percezione umana delle distorsioni cartografiche non è necessariamente allineata con queste metriche matematiche.

Ricerche recenti in cartografia cognitiva hanno iniziato a esplorare metriche di distorsione basate su esperimenti psicofisici: quanto gli utenti percepiscono come "distorta" una mappa? Questi studi suggeriscono che fattori come la familiarità visiva, la disposizione relativa dei continenti, e la deformazione delle linee costiere giocano ruoli importanti.

Incorporare queste metriche percettive nell'ottimizzazione delle proiezioni è una frontiera aperta che richiede la collaborazione tra matematici, cartografi e psicologi cognitivi.

La matematica al servizio della rappresentazione del mondo

La teoria delle distorsioni areali nelle proiezioni cartografiche, dall'ellisse indicatrice di Tissot ai moderni metodi variazionali di ottimizzazione, rappresenta un esempio magnifico di come la matematica pura—geometria differenziale, analisi funzionale, calcolo delle variazioni—trovi applicazioni concrete e immediate nella risoluzione di problemi pratici. Ogni mappa è necessariamente una bugia, nel senso che non può rappresentare fedelmente tutte le proprietà geometriche della superficie terrestre. Tuttavia, attraverso una comprensione profonda della natura matematica delle distorsioni, possiamo costruire bugie oneste: rappresentazioni che minimizzano gli errori secondo criteri ben definiti e che rendono esplicite le limitazioni intrinseche della trasformazione sfera-piano. Gli strumenti matematici sviluppati in questo contesto—dalla teoria tensoriale della metrica riemanniana al calcolo delle variazioni, dai metodi numerici di quadratura agli algoritmi di ottimizzazione vincolata—trovano applicazioni ben oltre la cartografia, dalla grafica computazionale alla relatività generale, dall'elaborazione di immagini alla meccanica dei continui. La sfida continua: mentre le coordinate geografiche digitali e i sistemi GPS hanno reso meno cruciale il problema della proiezione cartografica per la navigazione quotidiana, la necessità di visualizzare dati geospaziali complessi—climatici, demografici, economici, epidemiologici—su mappe bidimensionali rimane più pressante che mai. Le proiezioni ottimizzate, progettate mediante i metodi descritti in questo saggio, permettono di comunicare informazioni globali in modo più accurato ed efficace, servendo così la comprensione scientifica e la divulgazione pubblica in un'era di crescente complessità informativa. La matematica della distorsione cartografica ci ricorda che la precisione assoluta è un'illusione, ma che l'approssimazione ottimale è un obiettivo raggiungibile e nobile. In questo, la cartografia matematica offre una metafora più ampia per la conoscenza scientifica stessa: non la verità totale, ma la migliore rappresentazione possibile del mondo, consapevole dei propri limiti e rigorosa nei propri metodi.